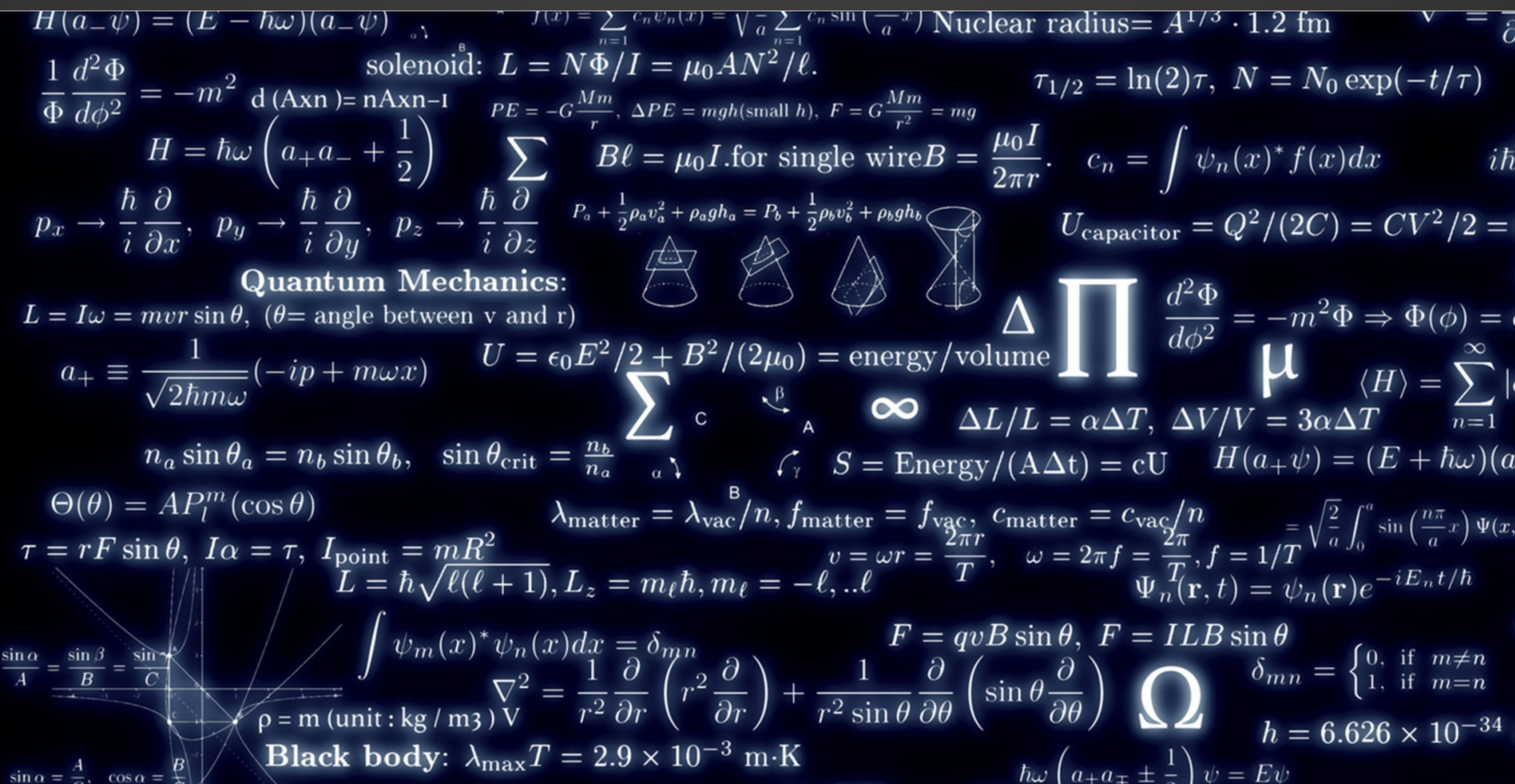
Artykuł III

K^C PRIME NUMBERS



O ilości liczb złożonych mniejszych od danej wielkości. Lematy, cd.

Artykuł III: *Co wiemy o rozmieszczeniu liczb pierwszych?*

W artykule II przedstawiliśmy 3 spośród 7 lematów, niezbędnych do wykazania hipotezy z Artykułu I:

Niech k oznacza liczbę liczb pierwszych między n i 2n+ 1 , a c liczbę liczb pierwszych między n^2 i $(n+1)^2$

Hipoteza:

Między n^2 i $(n+1)^2$ występuje c liczb pierwszych,
c jest zbieżne asymptotycznie do wartości ≈ k

W tym artykule prezentujemy kolejne dwa lematy, które poprzedziliśmy częścią eseistyczną. Stąd pytanie w jego tytule:

Co właściwie wiadomo o rozmieszczeniu liczb pierwszych?

Lista jest dosyć krótka: problem rozmieszczenia liczb pierwszych to dla szerszego ogółu jedynie kilka udowodnionych faktów i olbrzymia kolekcja hipotez.

1.Euklides: ***twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych***
2.Sito Eratostenesa: ***algorytm do wyszukiwania liczb pierwszych***
3.C.F. Gauss: ***Twierdzenie o liczbach pierwszych (TLP)***
4.P. Czebyszew: dowód postulatu Bertranda – ***„Między n i 2n jest co najmniej jedna liczba pierwsza"*** **z poprawką: P. Erdös –** ***„Między n i 2n są co najmniej dwie liczby pierwsze"***

Elegancja rozumowania przypisywanego Euklidesowi zachwyca matematyków po dzień dzisiejszy. Po pierwsze: Euklides zadał właściwe pytanie; po drugie: stworzył odpowiednie narzędzie do zbudowania dowodu. Zacznijmy od pytania, które zadał Euklides: skoro wszystkie liczby złożone są iloczynami liczb pierwszych, to czy istnieje skończenie wiele liczb pierwszych? Mówiąc inaczej: czy istnieje skończona lista liczb pierwszych, pozwalająca na takie ich wzajemne wymnożenie, aby otrzymać wszystkie liczby złożone?

Z kolei narzędzie Euklidesa to odkrycie, że *iloczyny kolejnych liczb pierwszych powiększone o liczbę 1, w dzieleniu przez te liczby pierwsze, lub ich iloczyny muszą również dawać resztę 1.* Spróbujmy podążyć za tokiem jego rozumowania. Zacznijmy od 2×3×5+1=31. Jeżeli teraz otrzymaną liczbę 31 podzieli się przez 2, przez 3 lub przez 5, albo wszelkie ich wzajemne iloczyny, to otrzymamy zawsze wynik dający resztę 1. Dlaczego? Każdy taki iloczyn ≥ 30 musi zawierać w sobie mnożenie czynników 2×5 =10, a tym samym kończyć się cyfrą 0. Tak więc każdy otrzymany w ten sposób iloczyn kolejnych liczb pierwszych, powiększony o liczbę jeden musi, w dzieleniu przez dowolną liczbę pierwszą różną od 2 i 5, dawać wynik kończący się cyfrą 0, a więc i resztę 1. Wniosek? Albo 31 musi być liczbą pierwszą albo liczba 31 jest liczbą złożoną podzielną przez liczbę pierwszą większą niż 5.

Oczywiście liczba 31 jest liczbą pierwszą i kolejne dwa iloczyny dają również wynik będący liczbą pierwszą: 2×3×5×7 + 1 = 211, 2×3×7 5×7×11 + 1 = 2311, ale następny iloczyn: 2×3×5×7×11×13 + 1 = 30031 jest liczbą złożoną, będącą iloczynem dwóch liczb pierwszych – 30031 = 59×509 – większych niż 2, 3, 5, 7, 11 i 13. Ponieważ takie postępowanie można powtarzać nieskończoną ilość razy, stąd oczywista konkluzja: liczb pierwszych musi być nieskończenie wiele. Na podkreślenie zasługuje fakt, że Euklides do dyspozycji miał jedynie własny umysł, i być może… liczydło (w matematyce greckiej tego okresu największą nazwaną liczbą była miriada czyli 10 000, a dalej było już jedynie „mnóstwo” miriad).

Z kolei Eratostenes proponując swój algorytm umożliwił nam istotne przesunięcie granicy poznania rozmieszczenia liczb pierwszych. Zaproponował „sito” do odsiewania chaosu liczb pierwszych od chaosu ich kolejnych wielokrotności, które wykorzystując trochę inaczej niż jego twórca, umożliwia postulowanie nowej perspektywy badawczej.

Na niezwykły szacunek i podziw zasługują wysiłki Eulera i Gaussa, którzy istotną, a być może nawet dominującą część swoich prac badawczych poświęcili zagadnieniu poszukiwania prawidłowości w rozmieszczaniu się liczb pierwszych. Euler uzyskał niezwykły rezultat, który dla niektórych badaczy, stał się dowodem na istnienie ścisłych związków kształtu otaczającego nas fizycznego świata z rozmieszczeniem liczb pierwszych. Oto okazało się, że pewien iloczyn liczb pierwszych, w wyniku, daje liczbę w zaskakujący sposób powiązaną ze światem fizycznym – kształtem koła:

$$\frac{2^2}{2^2-1} \times \frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \frac{7^2}{7^2-1} \times \frac{11^2}{11^2-1} \times \frac{13^2}{13^2-1} \times \frac{17^2}{17^2-1} \times \frac{19^2}{19^2-1} \times \frac{23^2}{23^2-1} \times \frac{29^2}{29^2-1} \times \frac{31^2}{31^2-1} \times \frac{37^2}{37^2-1} \times \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nieznaczna modyfikacja tego równania, a mianowicie wstawienie w miejsce wykładnika 2 zmiennej x dało słynną funkcję ζ(x) Riemanna:

$$\frac{2^x}{2^x-1} \times \frac{3^x}{3^x-1} \times \frac{5^x}{5^x-1} \times \frac{7^x}{7^x-1} \times \frac{11^x}{11^x-1} \times \frac{13^x}{13^x-1} \times \frac{17^x}{17^x-1} \times \frac{19^x}{19^x-1} \times \frac{23^x}{23^x-1} \times \frac{29^x}{29^x-1} \times \frac{31^x}{31^x-1} \times \frac{37^x}{37^x-1} \times \dots .$$

Dopiero jednak badania Gaussa przyniosły istotną wiedzę o rozmieszczeniu liczb pierwszych. Otóż studiując przez całe lata swojej pracy badawczej tablice liczb pierwszych poszukiwał on jakiejkolwiek prawidłowości, która mogłaby pokazać rozmieszczenie tych liczb. Przy tej okazji postawił doniosłe pytanie dotyczące analizy statystycznej ich liczebności – było to pytanie o *prawdopodobieństwo wystąpienia liczby pierwszej w zadanym przedziale.*

Pośród pierwszych stu liczb naturalnych znajduje się 25 liczb pierwszych czyli prawdopodobieństwo wystąpienia liczby pierwszej wynosi $\frac{1}{4}$. W pierwszym tysiącu jest ich 168, czyli prawdopodobieństwo wystąpienia liczby pierwszej wynosi $\cong \frac{1}{6}$. W 10 000 jest 1230 liczb pierwszych dając prawdopodobieństwo $\cong \frac{1}{8}$.

Odpowiednio dla 100 000 prawdopodobieństwo wystąpienia liczby pierwszej wynosi$\cong \frac{1}{10}$, dla 1000 000 $\cong \frac{1}{12}$, etc. Tą niezwykłą regularność statystyczną, z odrobinę „naciąganymi" w powyższej prezentacji zaokrągleniami, Gauss zapisał dokładniejszą formułą matematyczną, na którą zresztą nie miał dowodu, a która została nazwana *Twierdzeniem o Liczbach Pierwszych (TLP): π(N)=*$\frac{N}{\log N}$ *.*

Fakt, że zaobserwowaną przez Gaussa prawidłowość statystyczną udało się udowodnić dopiero po upływie stulecia, najdobitniej pokazuje skalę trudności, z którą zmagają się matematycy w dowodzeniu twierdzeń o rozmieszczeniu liczb pierwszych, ale również *pokazuje rangę dobrze skonstruowanej hipotezy badawczej*: przez stulecia najwybitniejsze umysły swych epok pracując nad dowodem takiej hipotezy dają impuls rozwojowy matematyce.

W prezentacjach problematyki liczb pierwszych zadomowiły się jednakże pewne stereotypy i kalki myślowe utrudniające heurezę. Już na wstępie wspomnianych prezentacji zwracają uwagę silną akcentacją takie np. opinie: „łatwo zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby liczb naturalnych N ilość liczb pierwszych bardzo szybko maleje". Skoro uznaliśmy, że już Euklides dowiódł, że *liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, to wraz ze wzrostem N ilość liczb pierwszych może tylko rosnąć, i to do nieskończoności.* Statystyka ilościowa tego procesu, odkryta przez Gaussa, pokazuje zróżnicowanie jedynie jego dynamiki: liczby naturalne generują się szybciej niż ich podzbiór jakim są liczby pierwsze. Oczywistym więc staje się pytanie: *czy można wskazać takie podzbiory liczb naturalnych, których dynamika przyrostu jest wolniejsza od*

K^C PRIME NUMBERS

dynamiki przyrostu liczb pierwszych, ale w sposób umożliwiający na ich tle efektywny proces badawczy? **Otóż takie** ***kryterium doskonale spełniają kwadraty liczb naturalnych.*** **Zauważył to już Euler:** ***„liczby pierwsze nie występują tak rzadko jak kwadraty".***

W 1978r. w porównywalnym zakresie jaki był dostępny Gaussowi – również bez dowodu – ***wskazano kolejną prawidłowość statystyczną*****: D. Andrica sformułował hipotezę, z której wynikał m. in. następujący wniosek, tożsamy z hipotezą Legendre::** ***„między kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych znajduje się liczba pierwsza".*** **Matematycy uznali, że hipoteza, jakkolwiek wydająca się poprawną, jest słabsza od sformułowanej wcześniej hipotezy Oppermana. Utrwalił się kolejny stereotyp: słaba hipoteza.**

Takie zwartościowanie tej hipotezy to jej stygmatyzacja: wybitny matematyk (fizyk, genetyk, etc.) udowodnił słabą hipotezę? Nawet amatorzy w matematyce stawiają sobie ambitniejsze cele. Okazuje się jednak, że jest ***to kluczowa hipoteza – Legendre -, której głębsza analiza pozwala na sformułowanie modelu prezentującego mechanizm rozmieszczenia liczb pierwszych*****. Dlaczego? Zwróćmy uwagę na fakt, że...** ***wszystkie liczby pierwsze są usytuowane pomiędzy kwadratami liczb naturalnych.*** **Zauważmy, że kwadrat dowolnej liczby, czyli n^2 musi być liczbą złożoną, gdyż posiada więcej niż dwa dzielniki: dzieli się przez 1, przez samą siebie czyli przez n^2, ale również przez n. Stąd oczywisty wniosek:** ***wszystkie liczby pierwsze muszą być rozmieszczone pomiędzy kwadratami kolejnych liczb naturalnych!*** **Pozostaje więc jedynie do wyjaśnienia kwestia następująca:** ***z jaką gęstością pomiędzy kolejnymi kwadratami liczb naturalnych liczby pierwsze są rozlokowane...*** **Okazało się, że wyniki Gaussa i Montgomery'ego przekonały matematyków do hipotezy, że liczby pierwsze są rozmieszczone raczej dosyć równomiernie. Zaobserwowana jednak przez Legendre prawidłowość statystyczna wskazywałaby, że ta równomierność występuje również w znacznie krótszych przedziałach niż w TLP. Zwróćmy uwagę na następującą zależność statystyczną: od 0 do 100 to 10 kwadratów liczb (od 1^2 do 10^2), na które przypada 25 liczb pierwszych, co daje średnio 2,5 liczb pierwszych na każdy kwadrat. Odpowiednio: 10 000 to 1229 liczb pierwszych i 100 kwadratów, co daje już średnio 12,29 liczb pierwszych na każdy kwadrat.**

Wartości rosną: 10^8 to odpowiednio 10 000 kwadratów i 5 761 455 liczb pierwszych, czyli na każdy kwadrat przypada już średnio 576,1 liczb pierwszych, zaś dla 10^{18} to 10^9 kwadratów i 24 739 954 287 740 860 liczb pierwszych co daje 24 739 954,3 liczb pierwszych na kwadrat.

Dlaczego nagle w jakimś przedziale liczb między dwoma kwadratami miałoby do sąsiednich „wyparować" 25 000 000 milionów liczb pierwszych? Matematycy przywołują tutaj pewien

argument, lecz jak pokażemy dalej – Artykuły IV i V – ma on znaczenie jedynie lokalne i nie wpływa na ilość liczb pierwszych między n^2 i $(n+1)^2$.

Reasumując, mamy bardzo silną hipotezę dotyczącą rozmieszczenia liczb pierwszych w krótkich przedziałach liczbowych (kwadraty liczb), wybiegającą daleko poza przypuszczenia Legendre i Andricy: *między kwadratami kolejnych liczb pierwszych występuje nie tylko jakaś liczba pierwsza, lecz ich liczebność wzrasta w sposób będący zależnością funkcyjną*.

W połączeniu z wnioskami będącymi konsekwencją analizy algorytmu Eratostenesa możemy sformułować hipotezę, której wspomniany już kaskadowy mechanizm funkcjonowania prezentujemy w kolejnych artykułach.

Sformułowany przez Bertranda w roku 1845 postulat zakładający występowanie przynajmniej jednej liczby pierwszej między n i 2n, sytuuje więc również co najmniej jedną liczbę pierwszą między liczbami 100 i 200. Jakkolwiek Erdös, pokazał, że muszą być dwie liczby pierwsze, to wyniki rzeczywiste, uzyskane na przestrzeni ostatnich 170 lat najdobitniej ilustrują frustrację badaczy: między liczbami 100 i 200 znajduje się 21 liczb pierwszych, a między 100 000 a 200 000 jest już 8392 liczb pierwszych, rosnąc dalej do nieskończoności.

Tak więc to, co udało się dotychczas udowodnić o rozmieszczeniu liczb pierwszych drastycznie odbiega od stanu faktycznego.

Oczywiście korelacja statystyczna może być jedynie silną przesłanką do wysuwania hipotez – w nauce, a w matematyce w szczególności, najistotniejszym celem jest znalezienie jedno jednoznacznego związku przyczynowo–skutkowego. Aby go wskazać musimy skompletować niezbędne instrumentarium, które obejmuje kilka narzędzi z zakresu elementarnej, a nawet intuicyjnej matematyki.

Narzędziami w matematyce są twierdzenia, które użyte w argumentacji dowodowej, nazywa się lematami. Pierwsze trzy pokazaliśmy w Artykule II. Poniżej dwa kolejne.

Niech $n \in N$

Lemat 4: **Do wyznaczenia pierwszych dzielników każdej liczby złożonej < $(n+1)^2$ wystarcza znajomość liczb pierwszych $\leq$ n**

Mamy więc nowe twierdzenie, które jako lemat orzeka, że do wyznaczenia wszystkich liczb złożonych między $10^2=100$ (n^2) i 11^2 ($(n+1)^2$) wystarcza znajomość liczb pierwszych ≤ 10 ($\leq n$).

K^C PRIME NUMBERS

Tym samym dostrzegamy, że każda liczba złożona <121 (czyli < $(n+1)^2$) musi być kolejną wielokrotnością: 2,3,5 lub 7 (wielokrotnością liczby pierwszej$\leq$n). Teraz możemy sięgnąć po kolejne narzędzie ze szkolnej matematyki, zadając pytanie:

Ile właściwie jest liczb między 10^2=100 (n^2) i 11^2 ($(n+1)^2$)?

Odpowiedź brzmi:

2×10 (2n):

Niech $n\in N$

<u>Lemat 5:</u> **Ilość liczb w przedziale między n^2 i $(n+1)^2$ wynosi 2n.**

Łatwo zauważyć, że:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Ponieważ istotą naszego pytania jest pytanie o ilość liczb pomiędzy n^2 i $(n+1)^2$, wystarczy jedynie odjąć 1, i dostajemy odpowiedź: 2n.

W tym miejscu, z uwagi na wspomniany wyżej postulat Bertranda, chcielibyśmy zwrócić szczególną uwagę na *pojawiającą się zależność: n i 2n – stanowiła ona kluczową przesłankę do odkrycia zależności funkcyjnej w rozmieszczaniu się liczb pierwszych…*